V. Annexe II : Quelques Formes du Calcul Intégral dans $\mathbb{R}$

	Types d'intégrales:	Méthodes d'intégration
1	$\int \ln(a+x)\ dx$	Intégration par parties, on pose: $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(a+x)$
2	$\int P(x)\ln(a+x)\ dx$ P polynôme de degré n, $n \in \mathbb{N}^*$	Intégration par parties, on pose: $u'(x) = P(x)$ et $v(x) = \ln(a+x)$
3	$\int P(x)e^{\alpha x}\ dx$ P polynôme de degré n, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \neq 0$	Intégration par parties, on pose: $u'(x) = e^{\alpha x}$ et $v(x) = P(x)$ n intégrations par parties
4	$\int P(x)\ \cos(\alpha x)\ dx$ $\int P(x)\sin(\alpha x)\ dx$ P polynôme de degré n, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \neq 0$	Intégration par parties, on pose: $u'(x) = \cos(\alpha x)$ ou $\sin(\alpha x)$ $v(x) = P(x)$ n intégrations par parties
5	$\int \mathcal{R}(x)\ dx$ où $\mathcal{R}$ est une fraction rationnelle	On se ramène à des formes simples: $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\ dx = \ln\lvert u(x)\rvert + c$ $\int \frac{u'(x)}{(u(x))^\alpha}\ dx = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(u(x))^{\alpha-1}} + c\right]$, $\alpha \neq 1$ $\int \frac{1}{a^2+x^2}\ dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + c\ \ (a \neq 0)$
6	$\int \mathcal{R}(e^x)\ dx$ $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle en e^x	On pose le changement de variable $u = e^x$, $du = e^x\ dx$ On se ramène à 5

7	$\int \mathcal{R}(\cos x, \sin x)\, dx$ $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$	On pose le changement de variable $t = tg(\frac{x}{2})$, on a les formules $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$. On se ramène à 5
8	$\int \mathcal{R}(chx, shx)\, dx$ $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle en chx et shx	On pose le changement de variable $t = th(\frac{x}{2})$, on a les formules $chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $shx = \frac{2t}{1-t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1-t^2}$ On se ramène à 5
9	$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{x^2+1})\, dx$ $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle contenant $\sqrt{x^2+1}$	On pose le changement de variable $x = sht,\ dx = cht\ dt,\ x^2+1 = ch^2 t$ On ce ramène à 8
10	$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{x^2-1})\, dx$ $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle contenant $\sqrt{x^2-1}$	On pose le changement de variable Si $x > 1$ on a $x = cht,\ dx = sht\ dt,\ x^2-1 = sh^2 t$ Si $x < -1$ on a $x = -cht,\ dx = -sht\ dt,\ x^2-1 = sh^2 t$ On se ramène à 8
11	$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{1-x^2})\, dx$ $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle contenant $\sqrt{1-x^2}$	On pose le changement de variable $x = \cos t\ \ dx = -\sin t\ dt,\ 1-x^2 = \sin^2 t$ ou bien $x = \sin t,\ dx = \cos t\, dt, 1-x^2 = \cos^2 t$. On se ramène à 7
12	$\int \cos px\ \cos qx\ dx,\ \ (p,q) \in \mathbb{R}^*$	$= \frac{1}{2}\int [\cos(p+q)x + \cos(p-q)x\ dx]$
13	$\int \sin px\ \cos qx\ dx,\ \ (p,q) \in \mathbb{R}^*$	$= \frac{1}{2}\int [\sin(p+q)x + \sin(p-q)x]\ dx$
14	$\int \sin px\ \sin qx\ dx,\ \ (p,q) \in \mathbb{R}^*$	$= \frac{-1}{2}\int [\cos(p+q)x - \cos(p-q)x]\ dx$
15	$\int \cos^{2n+1} x\ dx = \int \cos^{2n} x \cos x\ dx,\ n \in \mathbb{N}^*$ $\int \sin^{2n+1} x\ dx = \int \sin^{2n} x \sin x\ dx,\ n \in \mathbb{N}^*$	On pose $y = sinx$, $\cos^{2n} x = (1-\sin^2 x)^n$ On pose $y = \cos x$, $\sin^{2n} x = (1-\cos^2 x)^n$
16	$\int \cos^{2n} x\ dx,\ \ \ \int \sin^{2n} x\ dx,\ n \in \mathbb{N}^*$	On utilise les formules de linéarisation $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

Remarque: Les méthodes mentionnées dans les intégrales 12, 13, 14, 15 *et* 16 *restent valables pour les fonctions hyperboliques en utilisant les transformations adéquates avec ces fonctions.*

III. Annexe

Tables des primitives usuelles

Dans toute la table des primitives, c est une constante réelle quelconque.

Primitives simples	Primitives composées
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\int u'(x)u^\alpha(x)dx = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + c, \quad x \neq 0$	$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln\|u(x)\| + c$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c, \quad (x > 0)$	$\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} dx = \sqrt{u(x)} + c$
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c, \quad (a \neq 0)$	$\int u'(x)e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + c$
$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c, \ (a \neq 0)$	$\int u'(x)\cos(u(x))dx = \sin(u(x)) + c$
$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c, \ (a \neq 0)$	$\int u'(x)\sin(u(x))dx = -\cos(u(x)) + c$
$\int ch(ax+b)dx = \frac{1}{a} sh(ax+b) + c, \ (a \neq 0)$	$\int u'(x)ch(u(x))dx = sh(u(x)) + c$
$\int sh(ax+b)dx = \frac{1}{a} ch(ax+b) + c, \ (a \neq 0)$	$\int u'(x)sh(u(x))dx = ch(u(x)) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$	$\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} dx = \tan(u(x)) + c$
$\int \frac{1}{ch^2(x)} dx = th(x) + c$	$\int \frac{u'(x)}{ch^2(u(x))} dx = th(u(x)) + c$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + c \quad (a \neq 0)$	$\int \frac{u'(x)}{a^2+u^2(x)} dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{u(x)}{a}) + c \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + c \quad (a \neq 0)$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2-u^2(x)}} dx = \arcsin(\frac{u(x)}{a}) + c \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = argsh(\frac{x}{a}) + c \quad (a \neq 0)$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2+u^2(x)}} dx = argsh(\frac{u(x)}{a}) + c \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = argch(\frac{x}{a}) + c \quad (a \neq 0)$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-a^2}} dx = argch(\frac{u(x)}{a}) + c \quad (a \neq 0)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = argsh(x) + c = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + c$$

$$x > 1 \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \arg ch(x) + c = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + c$$

$$x < -1 \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = -\arg ch(-x) + c = -\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right) + c$$

$$|x| < 1 \Rightarrow \int \frac{1}{1-x^2}dx = \arg th(x) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$$

$$|x| > 1 \Rightarrow \int \frac{1}{1-x^2}dx = \arg\coth(x) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + c$$